## Integrali curvilinei. Integrale di una funzione su una curva

Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva di classe $C^1$. Definiamo l'integrale di $F$ su $\gamma$ come

$$\int_\gamma F = \int_a^b F(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

**Osservazione 1.** *Se $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora*

$$\int_\gamma (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_\gamma F + \beta \int_\gamma G.$$

**Osservazione 2.** *Se $\sigma : [b, c] \to \Omega$ è una curva $C^1$ a tratti e tale che $\gamma(b) = \sigma(b)$, allora*

$$\int_{\gamma*\sigma} F = \int_\gamma F + \int_\sigma F \qquad e \qquad \int_{\gamma^-} F = \int_\gamma F.$$

**Osservazione 3** (L'integrale non dimende dalla parametrizzazione)**.** *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

*sono equivalenti. Allora $\int_\gamma F = \int_\sigma F$. Infatti, se $g : [a, b] \to [A, B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora*

$$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \int_a^b F(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \qquad \textit{(per definizione)}\\ &= \int_a^b F(\sigma(g(t)))\,|\sigma'(g(t))|g'(t)\,dt \qquad \textit{(qui usiamo che } g' > 0\textit{)}\\ &= \int_A^B F(\sigma(s))\,|\sigma'(s)|\,ds \qquad \textit{(cambiamo variavile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt\textit{)}\\ &= \int_\sigma F \qquad \textit{(per definizione).}\end{aligned}$$

**Teorema 4** (Integrali curvilinei e partizioni)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva $C^1$ a tratti. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:*

*Se $\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k\}$ è una partizione di $[a, b]$ con $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) \le \delta$, allora:*

$$\left| S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi) - \int_\gamma F \right| \le \varepsilon,$$

*per ogni vettore $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^k$ ($k$ è il numero di intervalli della partizione) con*

$$\xi_k \in [t_{j-1}, t_j] \quad \textit{per ogni} \quad j = 1, \dots, k,$$

*dove $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) := \max_{j=1,\dots,k} |t_j - t_{j-1}|$, e $S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi)$ indica la somma parziale*

$$S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi) := \sum_{j=1}^k F(\gamma(\xi_j))\,|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

**Esempio 5.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

*Calcolare $\int_\gamma F$, dove $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la funzione*

(1) $F(x, y) = 1$; (2) $F(x, y) = x^2$; (3) $F(x, y) = xy$; (4) $F(x, y) = ye^x$; (5) $F(x, y) = xf(y)$.

**Esempio 6.** *Consideriamo la successione di curve*

$$\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t, t^n).$$

*Calcolare il limite* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} 1.$

## Integrazione di 1-forme

Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva di classe $C^1$ e
$$\alpha = \alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2 + \cdots + \alpha_n(x)\,dx_n$$
una 1-forma di classe $C^0$ su $\Omega$. Definiamo l'integrale di $\alpha$ su $\gamma$ come
$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt\,,$$
dove $\cdot$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e dove abbiamo identificato la forma $\alpha$ con il campo vettoriale
$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad \alpha(x) = \big(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)\big).$$
Inoltre, se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è $C^1$ a tratti, allora definiamo
$$\int_\gamma \alpha = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt\,,$$
dove
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$
è una qualsiasi partizione di $[a,b]$ tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

**Osservazione 7.** *Se $\alpha$ e $\beta$ sono due 1-forme su $\Omega$, allora*
$$\int_\gamma (\alpha + \beta) = \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \beta.$$

**Osservazione 8.** *Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $\sigma : [b,c] \to \Omega$ sono due curve $C^1$ a tratti tali che $\gamma(b) = \sigma(b)$, allora*
$$\int_{\gamma * \sigma} \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_\sigma \alpha.$$

**Osservazione 9.** *Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è una curva $C^1$ a tratt e se*
$$\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_-(t) = \gamma(a + b - t),$$
*allora*
$$\int_{\gamma_-} \alpha = -\int_\gamma \alpha.$$

**Osservazione 10** (L'integrale di una 1-forma non dipende dalla parametrizzazione)**.** *Supponiamo che le curve*
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A,B] \to \mathbb{R}^n$$
*sono equivalenti. Allora $\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$. Infatti, se $g : [a,b] \to [A,B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora*
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad \textit{(per definizione)}\\
&= \int_a^b \alpha(\sigma(g(t))) \cdot \sigma'(g(t)) g'(t)\,dt\\
&= \int_A^B \alpha(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s)\,ds \qquad \textit{(cambiamo variabile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt\textit{)}\\
&= \int_\sigma \alpha \qquad \textit{(per definizione).}
\end{aligned}$$

**Teorema 11.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $\alpha$ una 1-forma esatta in $\Omega$; precisamente, supponiamo che $\alpha = dF$, dove $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1$ su $\Omega$. Allora, per ogni curva $C^1$ a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ abbiamo*
$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$